Indefinite Metrik im Zustandsraum und Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Von Siegfried Schlieder

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München

(Z. Naturforschg. 15 a, 448—460 [1960]; eingegangen am 3. März 1960)

The purpose of the following paper, which is published in three parts, is to show the possibility of making consistent use of an indefinite metric in the space of states and of the probability interpretation of quantum mechanics. In the part I bilinear forms, which are invariant under the transformations of symmetry groups, are constructed. The construction of the fundamental metric tensor for the various types of representations is exemplified for the case of inhomogenious Lorentz group. The results are also applicable for other groups. The representations of the finite and compact group are however normal. In these cases the use of an indefinite metric does not bring about a new look for the theory of representations.

In the parts II and III besides invariance of bilinear forms further conditions are stated, which are sufficient for the propability interpretation. The existence of superselection rules by which the space of states breaks up into coherent sectors leads to two procedures. In the part II the facts within one coherent sector are solely studied. These results are important for the representations of those symmetry groups, which leave the coherent sectors invariant (e. g. the inhomogenious Lorentz group). Each sector is divided by a cut into a subspace, the elements of which represent physical systems, and a rest. The representations in the „subspace of physical systems" of these symmetry groups, which leave the sectors invariant, are unitary.

In the part III the space of states as a whole is investigated. The symmetry group of isotopic spin for a simple case is discussed there as an example of mapping from one coherent sector to another. At the end a possible generalization for the dual vector of a vector is discussed.

1. Bisherige Verwendung der indefiniten Metrik im Zustandsraum

Eine indefinite Metrik im Zustandsraum zu verwenden, erscheint wegen des Widerspruches, der mit der üblichen Wahrscheinlichkeitsinterpretation im allgemeinen entsteht, auf den ersten Blick sinnlos. Daß man trotzdem bei etwas Vorsicht mit einer indefiniten Metrik arbeiten kann, hat sich an Beispielen gezeigt. Dirac [1] kam als erster auf den Gedanken, von einer indefiniten Metrik, und zwar im Zusammenhang mit der Quantisierung von Bose-Feldern im Zustandsraum Gebrauch zu machen. Pauli [2] hat sich um weitere Klärung dieser Diracschen Methode besonders im Zusammenhang mit einer Theorie von Wentzel [3] bemüht. Während in den genannten Arbeiten das Hauptanliegen darin bestand, Konvergenzschwierigkeiten der quantisierten Theorien mit Hilfe der indefiniten Metrik zu überwinden, haben Bleuler [4] und Guppta [5] diese in der Elektrodynamik im Zusammenhang mit den Komplikationen, die bei der Quantisierung der vierten Komponente des Maxwell-Feldes auftraten, angewandt; ihre Art der Quantisierung hat sich eingebürgert.

Das neuerliche Interesse an der indefiniten Metrik im Zustandsraum wurde durch die Arbeiten über das Lee-Modell [6–8] geweckt. In die Heisenbergsche Theorie der Elementarteilchen [9] geht die indefinite Metrik als eine der wesentlichen Grundlagen ein.

2. Zielsetzung und Inhaltsangabe

Die vorliegende Arbeit stellt sich als erste Aufgabe, den Zusamenhang zwischen der Darstellungstheorie der im Zustandsraum wirkenden Symmetriegruppen und dem metrischen Fundamentaltensor herzustellen. Der Fundamentaltensor muß so eingeführt werden, daß die mit ihm gebildeten Bilinearformen im Zustandsraum unter den Symmetriegruppen invariante Größen werden. Dieses Programm wird im Teil I am Beispiel der inhomogenen Lorentz-Gruppe durchgeführt; die Resultate gelten bis auf spezielle Aussagen auch für andere Symmetriegruppen. Bei Verwendung einer indefiniten Metrik treten im allgemeinen nicht-unitäre Darstellungen auf.

[1] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc., Lond. A **180**, 1 [1942].
[2] W. Pauli, Rev. Mod. Phys. **15**, 175 [1943].
[3] G. Wentzel, Z. Phys. **86**, 479 u. 635 [1933].
[4] K. Bleuler, Helv. Phys. Acta **23**, 567 [1950]; K. Bleuler u. W. Heitler, Progr. Theor. Phys. **5**, 600 [1950].
[5] S. N. Gupta, Proc. Phys. Soc., Lond. **63**, 681 [1950].
[6] T. D. Lee, Phys. Rev. **95**, 1329 [1954].
[7] G. Källen u. W. Pauli, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk **30**, Nr. 7 [1955].
[8] W. Heisenberg, Nucl. Phys. **4**, 532 [1957].
[9] W. Heisenberg u. W. Pauli, On the Isospingroup in the Theory of Elementary Particles. Preprint (1958).

Es kommen dann auch reduzible, aber nicht zerfallende Darstellungen vor. Da diese Klasse von Darstellungen für die spätere Anwendung wichtig scheint, ihre Behandlung jedoch etwas mühsamer ist, nehmen sie im Teil I den größten Raum ein.

In den Teilen II und III wird auf die Wahrscheinlichkeitsinterpretation eingegangen. Da dieser eine Zerlegung eines Zustandes nach gewissen anderen Zuständen vorausgeht, d. h. umgekehrt, die Superposition von gewissen Zuständen zu einem vorliegenden wichtig wird, tritt die Frage der Superponierbarkeit von Zuständen in den Vordergrund. Es kommt damit die Tatsache ins Spiel, daß der Zustandsraum in kohärente Sektoren im Sinne der Überauswahlregeln zerfällt.

Damit muß sich die Betrachtung aufgabeln: Im Teil II werden die Verhältnisse innerhalb eines kohärenten Sektors diskutiert und Zusatzforderungen an die Darstellung der Symmetriegruppen, welche die kohärenten Sektoren invariant lassen, gestellt. Das Ergebnis, welches aus diesen Zusatzforderungen für den Zustandsraum folgt, läßt sich so zusammenfassen: Jeder kohärente Sektor $\mathfrak{S}$ zerfällt in zwei Teilräume. Im Teilraum $\mathfrak{S}''$ liegen die physikalischen Zustände im Komplement von $\mathfrak{S}''$ in bezug auf $\mathfrak{S}$ die nichtphysikalischen (oder „Geister"). Bestünde der Zustandsraum nur aus einem einzigen kohärenten Sektor $\mathfrak{S}$, so würden auf $\mathfrak{S}''$ durch die Symmetriegruppen unitäre Darstellungen induziert. Man muß natürlich von Anfang an $\mathfrak{S}$ so wählen: Den Elementen des durch die Zusatzforderungen herausgeschälten Teilraumes $\mathfrak{S}''$ müssen eineindeutig die empirisch auftretenden physikalischen Systeme zugeordnet werden können.

Im Teil III werden die Symmetriegruppen, die Sektoren aufeinander abbilden, behandelt und eine naheliegende Verallgemeinerung der Übereinstimmungswahrscheinlichkeit besprochen. Der letzte kurze Abschnitt des Teiles III befaßt sich mit dem zu einem Vektor dualen und weist auf eine mögliche Verallgemeinerung bei der Zuordnung des dualen Vektors hin.

Da der Fundamentaltensor der Metrik im Teil I Gegenstand der Diskussion und nicht eine vorgegebene Größe ist, wurde hier zunächst auf die elegantere Schreibweise mit kovarianten und kontravarianten Komponenten verzichtet. Im Teil II und Teil III wird dann die Schreibweise mit kovarianten und kontravarianten Größen angewendet. Der Anhang zum Teil I bringt einen etwas längeren Beweis, der den Text zu sehr belastet hätte.

Die Arbeit beschränkt sich, soweit in Teil I Sätze für die Konstruktion des Fundamentaltensors erarbeitet werden, auf die Klärung von der algebraischen Seite her. Wenn unendliche Matrizen auftreten, wird angenommen, daß sie existieren. An Zustandsräumen werden solche betrachtet, die sich als direkte Summen von Darstellungsräumen irreduzibler Darstellungen und reduzibler, aber nicht zerfallender Darstellungen (von dem in den Abschnitten 3 c und 3 d behandelten Typ) schreiben lassen. Neben den Konvergenzfragen bedarf bei einer Klärung von analytischer Seite her auch das Problem der Rückführung einer stetigen Strahldarstellung auf eine stetige Vektordarstellung, das von WIGNER [10] für die unitären Darstellungen behandelt wurde, der erneuten Überarbeitung.

Teil I. Invariante Bilinearformen

§ 1. Invariante Bilinearformen als Wahrscheinlichkeitsamplituden

Um etwas über die Darstellungen der Symmetriegruppen folgern zu können, sei eine Transformationsgruppe vom passiven Standpunkt [11] aus betrachtet. Liege zunächst eine definite Metrik vor. Mit (a) $\langle\psi|\varphi\rangle$ werde das in dem HILBERT-Raum erklärte invariante HERMITEsche Produkt bezeichnet, wobei $\langle\psi|$ die konjugiert-komplexen Komponenten von $|\psi\rangle$ hat. Eine Messung im Koordinatensystem A am Objekt c vorgenommen, habe das Element $\psi_A{}^c$ aus $\mathfrak{H}_A$ ergeben. (Um Verwechslungen zu vermeiden, wird hier von einer Messung im Koordinatensystem A und nicht von einem Beobachter A gesprochen, wobei man die Meßapparate als zum Koordinatensystem zugehörig betrachtet.) Die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, daß eine weitere im Koordinatensystem A an demselben System vorzunehmende Messung einen Zustand $\varphi_A{}^k$ ergibt, ist (b) $\langle\varphi_A{}^k|\psi_A{}^c\rangle$. Sei der Einfachheit halber angenommen, daß die $\varphi_A{}^k$ bereits ein vollständiges System von orthonormierten Zuständen bilden, so wird

$$
\text{(c)}\quad \langle\psi_A{}^c|\psi_A{}^c\rangle = \sum_k \langle\psi_A{}^c|\varphi_A{}^k\rangle\,\langle\varphi_A{}^k|\psi_A{}^c\rangle = \sum_k |\langle\varphi_A{}^k|\psi_A{}^c\rangle|^2 = \sum_k \langle\psi_A{}^c|P_k|\psi_A{}^c\rangle \quad \text{mit } P_k = |\varphi_A{}^k\rangle\langle\varphi_A{}^k|\,.
$$

[10] E. P. WIGNER, Ann. Math. **40**, 149 [1939].

[11] E. P. WIGNER, V. BARGMANN u. A. S. WIGHTMAN, Notes on Relativistic Quant. Mechanics. (Intern. School of Phys., Varenna 1958).

Aus (c) erkennt man, daß für P_k die beiden charakteristischen Eigenschaften der Projektionsoperatoren erfüllt sind:

$$P_k = P_k^*, \qquad P_k^2 = P_k .$$

Aus (c) folgt, daß $\langle \psi_A^c | P_k | \psi_A^c \rangle$ positiv definit ist, sofern $P_k | \psi_A^c \rangle \neq 0$ ist.

$\langle \psi_A^c | P_k | \psi_A^c \rangle$ soll die Übereinstimmungswahrscheinlichkeit [12] der Zustände φ_A^k und ψ_A^c heißen. Beschreibt ein Beobachter B von seinem Koordinatensystem aus die Messungen, die im Koordinatensystem A vorgenommen wurden, so ordnet er dem Element ψ_A^c aus $\mathfrak{H}_A$ ein transformiertes ψ_B^c aus $\mathfrak{H}_B$ zu, entsprechend dem Element φ_A^k aus $\mathfrak{H}_A$ ein transformiertes φ_B^k aus $\mathfrak{H}_B$, und die Übereinstimmungswahrscheinlichkeiten der Elemente ψ_A^c und φ_A^k aus $\mathfrak{H}_A$ einerseits und die der Elemente ψ_B^c und φ_B^k aus $\mathfrak{H}_B$ andererseits müssen gleich bleiben, da sie sich auf ein und denselben Meßvorgang beziehen.

(d) $$|\langle \varphi_A^k | \psi_A^c \rangle|^2 = |\langle \varphi_B^k | \psi_B^c \rangle|^2 .$$

Hierfür ist hinreichend, daß
(e) $\langle \varphi_A^k | \psi_A^c \rangle = \langle \varphi_B^k | \psi_B^c \rangle$ ist. Aus (e) geht hervor, daß die Transformation, welche $\mathfrak{H}_A \rightarrow \mathfrak{H}_B$ überführt, isometrisch sein muß. Falls $\mathfrak{H}_A = \mathfrak{H}_B$ ist, entspricht dieser Transformation eine unitäre Abbildung des HILBERT-Raumes auf sich selbst.

Es gibt auch Fälle, in denen zwar noch (d), aber nicht mehr (e) erfüllt ist, z. B. bei der Zeitumkehrtransformation, die man antiunitär wählt:
$\langle \varphi | \psi \rangle \rightarrow \langle \psi | T^* T \varphi \rangle$, wobei T unitär ist.

Von diesen Ausnahmen abgesehen, können bei Vorgabe der Gruppen, gegen die Invarianz bestehen soll, die Elemente des HILBERT-Raumes nur solchen Darstellungen angehören, in denen die Symmetriegruppen unitäre Darstellungen induzieren. Wenn man für den Zustandsraum größere Freiheit wünscht und andere Elemente, die sich nicht nach unitären Darstellungen transformieren, zuläßt, ist es nicht mehr möglich, für die Definition der Wahrscheinlichkeitsamplitude (a) in der Weise zu verwenden, daß man $\langle \psi |$ in einer bestimmten Basis die konjugiert-komplexen Maßzahlen von $| \psi \rangle$ zuordnet. Denn dann ließen sich die Gln. (d) und (e) nicht erfüllen. Statt dessen hat man die Bildung des zu $| \psi \rangle$ dualen Elementes in einer allgemeineren Weise vorzunehmen, um invariante Bilinearformen zu erhalten.

Das Symbol $\langle \chi | \psi \rangle$ soll fortan auch im allgemeinen Fall (bei indefiniter Metrik) invariante Bilinearformen bezeichnen. Dagegen soll wie üblich das Symbol (χ, ψ) für das im Zustandsraum erklärte HERMITEsche Produkt stehen, was nach Einführung einer vollständigen Basis durch $(\chi, \psi) = \sum_\nu \chi_\nu^* \psi_\nu$ erklärt wird, wobei die ψ_ν und χ_ν die zu ψ bzw. χ zugehörigen Maßzahlen sind.

(χ, ψ) ist bei Verwendung von nicht-unitären Darstellungen nicht mehr invariant. Der Teil I befaßt sich im wesentlichen mit der Aufgabe, einen HERMITEschen Fundamentaltensor g für die verschiedenen Typen von irreduziblen bzw. reduziblen aber nicht zerfallenden Darstellungen so einzuführen, daß $(g\chi, \psi) = (\chi, g\psi)$ invariant wird.

Die Diskussion über Projektionsoperatoren und Übereinstimmungswahrscheinlichkeiten im Falle der durch g eingeführten (indefiniten) Metrik mag später erfolgen. Hier sei nur angemerkt, daß im folgenden unter einem Erwartungswert eines Operators M der Ausdruck $\langle M \rangle = (\varphi, g M \varphi)/(\varphi, g \varphi)$ verstanden werden soll. Verlangt man, daß der Erwartungswert reell ist, so muß

$$(\varphi, g M \varphi)^* = (\varphi, M^* g \varphi) = (\varphi, g M \varphi)$$

sein, d. h. $M = g^{-1} M^* g = M^+$; M^+ heiße fortan der zu M adjungierte Operator ($M^+ = M$ ist selbstadjungiert), während M^* der HERMITEsch-konjugierte Operator zu M ist.

In den nächsten Paragraphen soll die Einführung eines Fundamentaltensors für die Transformationen der inhomogenen LORENTZ-Gruppe durchgeführt werden. Wir beschränken uns auf das Stück $\mathfrak{L}_{i1}$ der inhomogenen LORENTZ-Gruppe, das aus der Identität durch stetigen Übergang gewonnen werden kann. Wir fordern die Invarianz wie im Falle der definiten Metrik nicht erst für die Übereinstimmungswahrscheinlichkeiten, sondern etwas schärfer für die Bilinearform.

§ 2. Die inhomogene Lorentz-Gruppe

a) Gruppeneigenschaften im Zusammenhang mit der Darstellungstheorie

In diesem Abschnitt sollen die für die Darstellungstheorie wichtigsten Tatsachen für die inhomogene LORENTZ-Gruppe in Kürze zusammengestellt werden.

Bezeichnet man mit t_i die Translationen, mit Λ_k die homogenen Transformationen, mit (Λt) eine Translation um die gerichtete Strecke (Λt), wobei (Λt) aus t durch die homogene Transformation Λ hervorgeht, so gilt

$$t_1 \cdot t_2 = t_2 \cdot t_1 , \qquad \Lambda \cdot t = (\Lambda t) \cdot \Lambda .$$

[12] G. SÜSSMANN, Bayer. Akademie d. Wissensch. Math.-Naturw. Klasse. Neue Folge, Heft 88.

Wichtige Untergruppen von $\mathfrak{L}_{i1}$ sind die homogene Gruppe $\mathfrak{L}_{h1}$, die Translationsgruppe $\mathfrak{T}$, die eigentliche dreidimensionale Drehgruppe $\mathfrak{D}_3$, wobei $\mathfrak{D}_3$ in $\mathfrak{L}_{h1}$ liegt.

1. Der zweifache Zusammenhang von $\mathfrak{D}_3$ überträgt sich auf $\mathfrak{L}_{h1}$, und von da weiter auf $\mathfrak{L}_{i1}$, so daß auch diese Gruppen zweifach zusammenhängend sind.

2. Die Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ ist in $\mathfrak{L}_{i1}$ der einzige echte Normalteiler. Die Faktorgruppe $\mathfrak{L}_{i1}/\mathfrak{T}$ ist isomorph der homogenen Gruppe $\mathfrak{L}_{h1}$.

3. Sowohl die homogene Lorentz-Gruppe $\mathfrak{L}_{h1}$, wie auch die Translationsgruppe $\mathfrak{T}$ sind nicht kompakt, damit ist auch $\mathfrak{L}_{i1}$ nicht kompakt; doch $\mathfrak{L}_{h1}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{L}_{i1}$ sind wenigstens lokalkompakt.

Für die Darstellungstheorie folgt aus

1. daß man die zweideutigen Spindarstellungen der Drehgruppe auch unter den Darstellungen der $\mathfrak{L}_{h1}$ und $\mathfrak{L}_{i1}$ wiederfindet, aus

2. kann man auf die Treue der Darstellungen, insbesondere der irreduziblen Darstellungen, schließen. Treu soll heißen: Zu zwei voneinander verschiedenen Gruppenelementen gehören auch zwei voneinander verschiedene Matrizen. Da jede irreduzible Darstellung einer Gruppe die treue Darstellung einer Faktorgruppe sein muß, liest man die drei Möglichkeiten ab:

a) Die irreduzible Darstellung der $\mathfrak{L}_{i1}$ ist treu.

b) Die irreduzible Darstellung stellt $\mathfrak{L}_{i1}/\mathfrak{T}$, aber nicht $\mathfrak{L}_{i1}$ treu dar, ist damit eine treue Darstellung der homogenen Gruppe $\mathfrak{L}_{h1}$. In diesem Falle werden Elemente, die sich nur durch eine Translation unterscheiden, durch dieselbe Matrix dargestellt, insbesondere die Translationen durch die Identität.

c) Die Darstellung ist die identische Darstellung.

3. Hier läßt sich nichts unmittelbar folgern. Da $\mathfrak{L}_{i1}$ weder kompakt noch abelsch ist, kann man jedenfalls nicht damit rechnen, daß die irreduziblen unitären Darstellungen endlich dimensional sind. Tatsächlich ist seit längerem bekannt [10], daß es sowohl für die inhomogene Lorentz-Gruppe wie für die homogene Lorentz-Gruppe keine endlich dimensionalen unitären irreduziblen Darstellungen gibt, die außerdem noch treu sind. Da aus 2. folgte, daß außer den zu $\mathfrak{L}_{i1}$ oder $\mathfrak{L}_{h1}$ treuen irreduziblen Darstellungen nur die identische Darstellung vorkommen kann, ist diese die einzige endlich dimensionale irreduzible unitäre Darstellung. Es gibt natürlich treue endlich dimensionale irreduzible Darstellungen für $\mathfrak{L}_{i1}$ und $\mathfrak{L}_{h1}$, wenn man auf die Unitarität verzichtet, z. B. die 4-dimensionale Darstellung der $\mathfrak{L}_{h1}$ durch sich selbst.

b) Der Infinitesimalring der inhomogenen Lorentz-Gruppe

Für die Ringelemente des Infinitesimalrings der homogenen Lorentz-Gruppe $\mathfrak{L}_{h1}$ — sie gehören zu Transformationen, welche die 6 Koordinatenebenen invariant lassen — ergeben sich die folgenden Vertauschungsregeln

$$\text{(a)}\quad [M_{\mu\nu}, M_{\lambda\sigma}]_- = i(\delta_{\mu\sigma} M_{\lambda\nu} + \delta_{\mu\lambda} M_{\nu\sigma} + \delta_{\nu\sigma} M_{\mu\lambda} + \delta_{\nu\lambda} M_{\sigma\mu})$$

$$(\mu, \nu = 1, 2, 3, 4, \quad \mu \neq \nu, \quad \lambda \neq \sigma, \quad M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}).$$

Geht man von der homogenen Lorentz-Gruppe $\mathfrak{L}_{h1}$ zur inhomogenen $\mathfrak{L}_{i1}$ und entsprechend vom Infinitesimalring $\mathfrak{L}_{h1}^{\circ}$ zum Infinitesimalring $\mathfrak{L}_{i1}^{\circ}$ über, so kommen die Ringelemente p_λ hinzu, wobei jedem in der Gruppe $\mathfrak{L}_{i1}$ die Translationen in Richtung der Achse λ zugeordnet sind. Man erhält die weiteren Vertauschungsregeln

$$\text{(b)}\quad [M_{\mu\nu}, p_\lambda]_- = i(p_\nu \delta_{\mu\lambda} - p_\mu \delta_{\nu\lambda}), \quad [p_\mu, p_\nu]_- = 0.$$

Statt der $M_{\mu\nu}$ führt man für die Bildung der invarianten Polynome meist andere Größen ein, den Vektor

$$g_\mu = M_{\mu\nu} p_\nu,$$

den Pseudovektor $\Gamma_\tau = \dfrac{1}{2i} \varepsilon_{\tau\mu\nu\lambda} M_{\mu\nu} p_\lambda$

mit $\varepsilon_{\tau\mu\nu\lambda}$ als totalantimetrischen Einheitstensor. Wegen

$$M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu} \quad \text{folgt} \quad g_\mu p_\mu = 0$$

und wegen $\varepsilon_{\tau\mu\nu\lambda} = -\varepsilon_{\lambda\mu\nu\tau}$ ergibt sich $\Gamma_\tau p_\tau = 0$.

Für die Vertauschungsrelationen der neu eingeführten Größen erhält man

$$[p_\mu, \Gamma_\sigma]_- = 0, \quad [\Gamma_\sigma, \Gamma_\xi]_- = p_\lambda \Gamma_\mu \varepsilon_{\mu\sigma\xi\lambda}, \quad [p_\mu, p_\nu]_- = 0,$$

$$[g_\mu, \Gamma_\sigma]_- = -i\,\Gamma_\mu p_\sigma, \quad [g_\mu, p_\nu]_- = -i(p_\mu p_\nu - \delta_{\mu\nu} p_\lambda^2),$$

$$[g_\mu, g_\nu]_- = -i(g_\mu p_\nu - g_\nu p_\mu + i\,\varepsilon_{\sigma\mu\nu\lambda} \Gamma_\sigma p_\lambda) = -i\,M_{\mu\nu} p_\lambda^2.$$

Zunächst sei nach einem einfachen Satz von Polynomen gefragt, die mit den Elementen der homogenen Gruppe $\mathfrak{L}_{h1}$, oder was äquivalent ist, mit den Basiselementen des Infinitesimalringes $M_{\mu\nu}$ vertauschen: Das sind die Polynome $\Sigma\, p_\mu^2$, $\Sigma\, \Gamma_\sigma^2$, $\Sigma\, g_\mu^2$, $\Sigma\, g_\mu \Gamma_\mu$. Die anderen Invarianten, wie $\Sigma\, M_{\mu\nu}^2$, können durch diese vier ausgedrückt werden. Stellt man die schärfere Forderung der Vertauschbarkeit mit allen Elementen der Gruppe $\mathfrak{L}_{i1}$, so bleiben nur zwei $\Sigma\, p_\mu^2$, $\Sigma\, \Gamma_\sigma^2$ übrig. Für die Darstellungstheorie kann man damit folgendes ableiten: Zu jeder irreduziblen Darstellung der inhomogenen Lorentz-Gruppe gehört je ein Eigenwert von $\Sigma\, p_\mu^2$ und $\Sigma\, \Gamma_\sigma^2$. Physikalisch bedeuten diese für die zur irreduziblen Darstellung gehörende Teilchensorte das Quadrat der Ruhmasse m_0^2 bzw. $m_0^2\, s(s+1)$ mit s als Spin des Teilchens. Im Falle verschwindender Ruhmasse, bei der auch der Eigenwert zu $\Sigma\, \Gamma_\sigma^2$ verschwindet, wählt man die Proportionalitätskonstante s in $\Gamma_\sigma = \pm s\, p_\sigma$ zur Charakterisierung ($\pm$ gibt die Polarisationsrichtung an).

Für die irreduziblen Darstellungen der inhomogenen Lorentz-Gruppe, welche isomorph zur Faktorgruppe $\mathfrak{L}_{i1}/\mathfrak{T}$ bzw. zur $\mathfrak{L}_{h1}$ sind, wird, da die Translationen durch I dargestellt werden, $p_\mu = 0$. Sie sind durch die Eigenwerte von $\Sigma\, p_\mu^2 = 0$, $\Sigma\, \Gamma_\sigma^2 = 0$ und weitere Eigenwerte zu g_μ^2, $g_\mu \Gamma_\mu$ gekennzeichnet. Statt der letzten beiden Invarianten kann man auch

$$\Sigma\, M_{\mu\nu}^2, \quad \Sigma\, i\, M_{\mu\nu} M_{\varrho\tau} \varepsilon_{\mu\nu\varrho\tau}$$

benutzen.

Die im Vorangehenden gemachten Bemerkungen gelten unabhängig davon, ob die Darstellungen unitär sind oder nicht.

Der Anfang dieses Abschnittes befaßte sich mit dem Übergang von der Gruppe zu ihrem Infinitesimalring. Zum Schluß sollen noch ein paar Bemerkungen zu der entgegengesetzten Frage folgen. Wie gelangt man vom Infinitesimalring zur Gruppe, bzw. von seiner Darstellung des Infinitesimalringes zu einer Darstellung der

Gruppe? Bei einer Reihe von Gruppen, zu denen auch die inhomogene LORENTZ-Gruppe zählt, gilt: Sei U Element des Infinitesimalringes. Die Abbildung $U \to e^U$ bildet eine Umgebung der Null des Infinitesimalringes in eine Umgebung der I in der Gruppe umkehrbar eindeutig und stetig ab. Für die Darstellungen gilt: Eine Darstellung des Infinitesimalringes $\mathfrak{G}^\circ$ ist Infinitesimalring einer Darstellung von $\mathfrak{G}$. Zu der Darstellung der Gruppe, genauer des Gruppenkeimes, gelangt man durch die Matrixexponentialfunktion $D = e^A$; D = Matrix der Darstellung der Gruppe, A = Matrix der Darstellung des Infinitesimalringes [13]. Zu diesem Übergang bei unendlich-dimensionalen Darstellungen siehe z. B. Anm. [10].

§ 3. Grundtypen von Darstellungen

Sei $\{V(d)\}$ die Darstellung einer Gruppe $\mathfrak{G}$ mit d in $\mathfrak{G}$, so ist auch $\{(V^*(d))^{-1}\}$ eine Darstellung (V^* ist die zu V HERMITEsch-konjugierte Matrix), auf die sich von $\{V(d)\}$ die Eigenschaften der Irreduzibilität, der Reduzibilität, des Zerfalls übertragen. (Falls keine Verwechslungen zu befürchten sind, soll das Argument von V weggelassen werden.)

1. Typ: $\{V(d)\} = \{(V^*(d))^{-1}\}$ identisch in d. Oder $\{V^*\}\{V\} = I$. Es liegt eine unitäre Darstellung vor. Die Unitarität bedingt, daß die Reduzibilität einer Darstellung den Zerfall zur Folge hat. Wegen der Einfachheit soll hier die Frage des Fundamentaltensors sofort erledigt werden. Man gewinnt invariante Bilinearformen, indem man den Fundamentaltensor diagonal und auf dem Raume einer irreduziblen Darstellung konstant wählt. Ein Spezialfall hiervon ist die übliche definite Metrik, welche den Fundamentaltensor gleich I setzt.

Des weiteren sind nicht-unitäre Darstellungen zu betrachten. Wenn eine nicht-unitäre Darstellung in irreduzible zerfällt, so können unter den irreduziblen Darstellungen unitäre vorkommen, es müssen aber auch nicht-unitäre vorhanden sein. Die Teile des Fundamentaltensors, die sich auf die unitären irreduziblen Darstellungen beziehen, kann man nach Typ 1 behandeln. Für die nicht-unitären irreduziblen können zwei Fälle eintreten:

2. Typ: $\{V\}$ äquivalent $\{(V^*)^{-1}\}$, $\{V\}$ irreduzibel.
3. Typ: $\{V\}$ nicht-äquivalent zu $\{(V^*)^{-1}\}$, $\{V\}$ irreduzibel.

Bei den reduziblen, aber nicht zerfallenden Darstellungen müssen auch Teile der Darstellung vorkommen, welche zum 4. Typ: $\{W\} = \begin{pmatrix} \{V_1\} & \{V\} \\ 0 & \{V_2\} \end{pmatrix}$ gehört. Wenn $\{W\}$ Darstellung ist, so müssen auch $\{V_1\}$, $\{V_2\}$ Darstellungen sein; es soll angenommen werden, daß diese irreduzibel sind.

§ 4. Diskussion der Grundtypen [14]

a) $\{V\}$ *äquivalent zu* $\{(V^*)^{-1}\}$

Unter der Annahme $\{V\}$ irreduzibel und $\{V\}$ äquivalent zu $\{(V^*)^{-1}\}$ soll unter der Invarianzforderung der durch den Fundamentaltensor definierten Bilinearformen gezeigt werden:

Satz 1: Es gibt einen HERMITEschen nicht ausgearteten Fundamentaltensor, und jeder Fundamentaltensor stimmt bei gegebener Darstellung mit diesem bis auf eine Konstante überein.

Beweis: Zunächst wird bewiesen: Es gibt einen von Null verschiedenen Fundmentaltensor, der HERMITEsch ist.

Nach Definition der Äquivalenz der beiden Darstellungen $\{V\}$ und $\{(V^*)^{-1}\}$ gibt es eine nicht ausgeartete Matrix g^* so, daß $\{V\} = (g^*)^{-1}\{(V^*)^{-1}\}\, g^*$ ist. Daher bleibt

$$(\varphi, g\,\chi) = (\varphi, g\,V^{-1}\,V\,\chi) = (V\,\varphi, g\,V\,\chi)$$

bei einer Transformation invariant. Das gilt für alle Bilinearformen, die aus den Elementen des Darstellungsraumes gebildet werden können, mithin auch für

$$J_1 = (\chi, g\,\varphi) \quad \text{und für} \quad J_2 = (\chi, g^*\,\varphi)\,.$$

Mit J_1 und J_2 sind

$$A = J_1 + J_2 = (\chi, [g + g^*]\,\varphi)$$

und

$$B = i(J_1 - J_2) = (\chi, i[g - g^*]\,\varphi)$$

invariante Formen. Da $g \neq 0$ gilt, ist mindestens eine der Matrizen $g + g^*$ oder $i(g - g^*)$ ungleich Null.

Damit ist zunächst bewiesen: Es gibt einen von Null verschiedenen HERMITEschen Fundamentaltensor.

Weiter wird im folgenden gezeigt: Ein zweiter Fundamentaltensor h zu V muß mit g bis auf eine Konstante übereinstimmen. Es gilt

$$\text{(a)} \quad \{V^*\}\,g\{V\} = g\,, \qquad \text{(b)} \quad \{V\}\,h\{V\} = h\,.$$

Da g nicht ausgeartet ist, kann man $h = \alpha\, g$ mit

[13] H. BOERNER, Darstellungen von Gruppen, Springer-Verlag, Berlin 1955.

[14] Vgl. JU. M. SHIROKOV, Sov. Phys. J. Exp. Theor. Phys. 6, (33), 664 [1958]. Dort ist ein Teil der Sätze von § 4 a und § 4 b bereits abgeleitet. H. JOOS hat mich gleichfalls auf die Konstruktion der Bilinearformen von I, § 4 b aufmerksam gemacht.

$\alpha = h\, g^{-1}$ setzen. Damit wird aus (b)

$$\{V^*\}\, \alpha\, g\{V\} = \alpha\, g$$

und aus (a) durch Multiplikation mit α von links

$$\alpha\{V^*\}\, g\{V\} = \alpha\, g$$

damit $\{V^*\}\, \alpha\, g\{V\} = \alpha\{V^*\}\, g\{V\}$.

Da $\{V\}$ die Darstellung einer Gruppe ist, existiert auch stets zu V ein V^{-1}. Mit V^{-1} wird jede Gleichung von rechts, darauf mit g^{-1} multipliziert, so daß $\{V^*\}\, \alpha = \alpha\{V^*\}$ folgt. Wegen der Irreduzibilität der Darstellung ergibt sich nach dem Lemma von SCHUR $\alpha = \text{const}\, I$, daher $h = \text{const}\, g$ wie behauptet.

Damit folgt $g = \text{const}\, g^*$, weil mit g auch g^* Fundamentaltensor ist. Mit g ist auch g^* nicht ausgeartet und es gilt $g = e^{i\gamma} g^*$ (γ reell). Man sieht so, daß mindestens einer der beiden Tensoren $g + g^*$, $i(g - g^*)$ nicht ausgeartet ist. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Aus dem zweiten Teil des Beweises folgt weiter, daß hier jeder Fundamentaltensor, sofern er nicht gerade Null, auch nicht ausgeartet ist.

Satz 2: Die Invarianten $\Sigma\, p_\mu^2$, $\Sigma\, \Gamma_\sigma^2$ besitzen reelle Eigenwerte.

Beweis: Seien $\{B\}$ darstellende Matrizen für die Elemente des Infinitesimalringes, so erhält man durch die Matrixexponentialfunktion die darstellenden Matrizen $\{V\}$ für die Gruppe $\{V\} = \{e^B\}$. Da nun $\{(e^B)^{-1}\} = \{e^{-B}\}$, $\{(e^B)^*\} = \{e^{B^*}\}$ gilt, ergibt sich für die Darstellung $\{(V^*)^{-1}\}$

$$\{(V^*)^{-1}\} = \{e^{-B^*}\}.$$

Für B kommen hier die Elemente

$$B = i\, \xi_\mu\, p_\mu$$
$$+ \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} M_{\mu\nu} = i(\xi_k\, p_k - \xi_0\, p_0) + \frac{i}{2} (\varepsilon_{kl} M_{kl} - 2\, \alpha_k N_k)$$

mit ξ_σ, α_k reell $p_0 = H$ (HAMILTON-Operator), $M_{i4} = i\, N_i$ in Frage. Es wird

$$-B^* = i(\xi_k\, p_k^* - \xi_0\, p_0^*) + \frac{i}{2} (\varepsilon_{kl} M_{kl}^* - 2\, \alpha_k N_k^*).$$

Hieraus folgt: Wenn zu der Darstellung $\{V\}$ die infinitesimalen Operatoren p_k, p_0, M_{kl}, N_k gehören, dann gehören die Operatoren p_k^*, p_0^*, M_{kl}^*, N_k^* zu $\{(V^*)^{-1}\}$. Aus $\{V\} = g^{-1}\{(V^*)^{-1}\}\, g$, das heißt $\{e^B\} = g^{-1}\{e^{-B^*}\}\, g$ folgt

$$p_k = p_k^+, \quad p_0 = p_0^+, \quad M_{kl} = M_{kl}^+, \quad N_k = N_k^+.$$

Diese Operatoren sind also selbstadjungiert. Entsprechend ergibt sich, wenn man

$$\Gamma_\sigma = \frac{1}{2\,i} \varepsilon_{\sigma\mu\nu\lambda} M_{\mu\nu}\, p_\lambda = \frac{1}{2\,i} \varepsilon_{\sigma\mu\nu\lambda}\, p_\lambda\, M_{\mu\nu}$$

beachtet:

$$\Gamma_k^+ = \Gamma_k, \quad \Gamma_4^+ = -\Gamma_4,$$
$$\text{bzw.} \quad \Gamma_0^+ = \Gamma_0 \quad \text{mit} \quad \Gamma_4 = i\, \Gamma_0.$$

Wegen $\Sigma\, p_\mu^2 = (\Sigma\, p_\mu^2)^+$ und $\Sigma\, \Gamma_\sigma^2 = (\Sigma\, \Gamma_\sigma^2)^+$ folgt dann die Behauptung.

Satz 3: Die Operatoren p_k, p_0, Γ_k, Γ_0, M_{kl}, N_k besitzen reelle Erwartungswerte. Das folgt aus der Selbstadjungiertheit dieser Operatoren.

Satz 4: Die Invariante s der irreduziblen Darstellungen, für welche die Ruhmasse verschwindet, ist reell.

Beweis: Nach Satz 3 ist

$(\varphi, g\, \Gamma_k\, \varphi)$ reell und

$(\varphi, g\, p_k\, \varphi)$ reell und es folgt aus $\Gamma_k = \pm s\, p_k$

$s = \pm \dfrac{(\varphi, g\, \Gamma_k\, \varphi)}{(\varphi, g\, p_k\, \varphi)}$ und das ist dann ebenfalls reell.

Satz 5: Für die irreduziblen Darstellungen, welche isomorph zu $\mathfrak{L}_{i1}/\mathfrak{T}$, d. h. für die $p_\mu \equiv 0$ gilt, sind auch die hinzukommenden Invarianten $\Sigma\, M_{\mu\nu}^2$, $i\, M_{\mu\nu}\, M_{\lambda\sigma}\, \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ reell.

Beweis: Man beweist die Selbstadjungiertheit dieser Operatoren wie in Satz 2.

Satz 6: Die Operatoren p_k, p_0, Γ_k, Γ_0 besitzen reelle Eigenwerte. Falls man einen vertauschbaren Satz von ihnen, z. B. p_k, p_0 und Γ_1 diagonal macht, läßt sich der Fundamentaltensor gleichfalls diagonal machen und p_k, p_0, Γ_1 werden HERMITEsche Operatoren.

Beweis: Der erste Teil der Behauptung folgt aus Satz 3. Der zweite folgt so: Wegen $p_k = p_k^+$, $p_0 = p_0^+$ und p_k, p_0 diagonal und reell, wird $p_k = p_k^*$, $p_0 = p_0^*$ ebenso $\Gamma_1 = \Gamma_1^*$. Damit ergibt sich weiter

$$[p_k, g]_- = 0, \quad [p_0, g]_- = [\Gamma_1, g] = 0.$$

Aus der Vertauschbarkeit folgt, daß man auch g simultan diagonal machen kann.

Satz 7: Man kann für g im Falle der Basiswahl von Satz 6 die Diagonalelemente $+1$ oder -1 annehmen.

Beweis: Nach Satz 1 gibt es auch einen HERMITEschen Tensor g', der bis auf eine Konstante mit dem diagonalen Fundamentaltensor g von Satz 6 übereinstimmen muß. Da g' dann außerdem diagonal sein muß, ist es reell; mithin kann g durch entsprechende Wahl einer Konstanten reell gemacht und durch entsprechende Maßstabwahl auf die behauptete Gestalt gebracht werden.

Satz 8: Für die irreduziblen Darstellungen mit $p_\mu = 0$ kann man außerdem (die p_μ und Γ_μ haben ja hier die Eigenwerte Null) zwei der $M_{\mu\nu}$, z. B. M_{12}, M_{34}, diagonalisieren. Es werden dann M_{12}, $i\,M_{34}$ HERMITEsche Operatoren und g läßt sich simultan diagonal machen.

Beweis wie bei Satz 6.

Zum Schluß dieses Abschnitts sollen die Ergebnisse zusammengefaßt und einige Bemerkungen angefügt werden. Zunächst zeigte sich, daß zu jeder irreduziblen Darstellung des behandelten Typs ein nicht ausgearteter HERMITEscher Fundamentaltensor gefunden werden kann. Verschiedene Fundamentaltensoren zu derselben irreduziblen Darstellung stimmen bis auf einen komplexen Faktor überein, sind also alle nicht ausgeartet oder identisch Null. Beschränkt man sich auf HERMITEsche Fundamentaltensoren, wie es hier geschehen soll, so sind diese bis auf einen reellen Faktor festgelegt. Ein HERMITEscher Tensor läßt sich stets durch unitäre Transformationen auf Diagonalform bringen. Sollten dabei nur positive Eigenwerte auftreten, so kann man durch eine Maßstabänderung der Basisvektoren den Fundamentaltensor zum Einheitstensor machen, die irreduzible Darstellung wird dann unitär. Hier interessiert mehr der allgemeine Fall. Für diesen wurde weiter gezeigt, daß die jeweils möglichen Invarianten, zwei Invarianten bei den treuen Darstellungen, vier Invarianten bei den Darstellungen mit $p_\mu = 0$ reell sind. Bei dieser Tatsache liegt der Nachdruck darauf, daß dies unabhängig von der speziellen irreduziblen Darstellung, wenn sie nur zu dem behandelten Typ gehört, immer genau dieselben Invarianten sind. Für eine einzige irreduzible Darstellung kann man natürlich trivialerweise stets durch einen komplexen Faktor aus einer Invarianten eine reelle Invariante machen. Die gewählten Invarianten $\Sigma\, p_\mu^2$, $\Sigma\, \Gamma_\sigma^2$ stimmen mit denen überein, denen bei unitären Darstellungen das Quadrat der Ruhmasse, bzw. das Quadrat des Spins [genauer $m_0^2\, s(s+1)$] zugeordnet ist. Weiter zeigte sich, daß die Operatoren p_0, p_k und Γ_0, Γ_k selbstadjungiert sind. Hieraus ergab sich: Wählte man einen vertauschbaren Satz von ihnen und machte sie mit einer entsprechenden Basis diagonal, so wurden die Operatoren dieses Satzes HERMITEsch und konnten simultan diagonal sein. Die Eigenschaft eines Operators, HERMITEsch zu sein, hängt hier, entgegen den Verhältnissen, die man bei definiter Metrik antrifft, durchaus von der Basis ab. Daraus, daß insbesondere die p_k, p_0 reelle Eigenwerte besitzen, folgt die Eigenschaft, daß die Translationen durch unitäre Operatoren dargestellt werden, d. h. $V(t_k)$ ist eine Marix mit den Diagonalelementen $\exp[i(p_l\, a_l^k - p_0\, a_0^k)]$, wie bei Verwendung einer definiten Metrik zugeordnet.

b) $\{V\}$ nicht äquivalent zu $\{(V^*)^{-1}\}$

Es ist wieder vorausgesetzt, daß $\{V\}$ irreduzibel ist. Zunächst wird folgendes bewiesen:

Behauptung: Man kann auf dem Darstellungsraum von $\{V\}$ keinen von Null verschiedenen Fundamentaltensor einführen.

Beweis: Erstens sieht man leicht ein, daß man keinen nicht ausgearteten Fundamentaltensor findet. Das folgt unmittelbar daraus, daß $\{V\}$ nicht äquivalent zu $\{(V^*)^{-1}\}$ sein soll. Zweitens mag es einen ausgearteten Fundamentaltensor g geben. Dann findet man mindestens ein Element φ_k mit $(\varphi_k, \varphi_k) \neq 0$, so daß $(\varphi_k, g\,\chi) = 0$ wird, für alle χ des Darstellungsraumes. Wie man leicht einsehen kann und weiter unten (Teil II, § 3c) bewiesen wird, bilden die auf allen Vektoren senkrecht stehenden Vektoren einen invarianten Teilraum. Daraus folgt: Entweder ist die Darstellung reduzibel, oder aber der invariante Teilraum ist der ganze Darstellungsraum, dann ist $g = 0$. Damit ist der Beweis erbracht.

Um trotzdem invariante Bilinearformen zu erhalten, braucht man ein g, das nicht simultan mit den irreduziblen Darstellungen der Gruppe, hier der inhomogenen LORENTZ-Gruppe, zerfällt.

Es kann sein, daß neben der irreduziblen Darstellung $\{V\}$ auch eine irreduzible $\{(V^*)^{-1}\}$ in dem vorliegenden Zustandsraum induziert wird. Wenn das nicht der Fall ist, erweitere man den Zustandsraum entsprechend, so daß schließlich ein Darstellungsraum $\{\varphi\}$, der sich mit $\{V\}$ und einer $\{\overline{\varphi}\}$, der sich mit $\{(V^*)^{-1}\}$ transformiert, vorhanden sind. Bildet man jetzt eine Bilinearform

$$k_1 = (\chi, \varphi) \quad \text{mit } \varphi \text{ in } \{\varphi\} \text{ und } \chi \text{ in } \{\overline{\varphi}\},$$

so geht diese bei Transformationen in

$$k_1 = (\chi, V^{-1}\, V\, \varphi) = (\chi, \varphi)$$

über, ist mithin invariant. Ebenso ist $k_2 = (\varphi, \chi)$ invariant. Die Linearkombinationen $C = k_1 + k_2$, $D = i(k_1 - k_2)$ sind reelle Invarianten. Man führt zweckmäßig die folgenden Bezeichnungen ein: Sei $\Phi = \binom{\varphi}{\chi}$ ein Element, aus dem durch direkte Summenbildung gewonnenen Darstellungsraum

$$\{\Phi\} = \{\varphi\} + \{\bar{\varphi}\} \quad \text{und} \quad \Phi^* = (\varphi^*, \chi^*) .$$

Mit $\sigma_1 \times I = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$ und $\sigma_2 \times I = \begin{pmatrix} 0 & iI \\ iI & 0 \end{pmatrix}$ wird

$$C = (\Phi, [\sigma_1 \times I]\, \Phi), \qquad D = (\Phi, [\sigma_2 \times I]\, \Phi).$$

Sowohl $g_1 = \sigma_1 \times I$ wie $g_2 = \sigma_2 \times I$ bilden mögliche Fundamentaltensoren. Bei beiden sind Elemente der Gestalt $\Phi^{10} = \binom{\varphi}{0}$ und auch $\Phi^{01} = \binom{0}{\chi}$ Vektoren, die (im Sinne der g-Metrik) orthogonal zu sich selbst sind; aber man kann zu jedem Element aus $\{\Phi^{10}\}$ ein Element aus $\{\Phi^{01}\}$ finden, so daß ihre Bilinearform nicht verschwindet. $\{\Phi^{10}\}$ und $\{\Phi^{01}\}$ bilden der Konstruktion nach invariante Unterräume von Nullvektoren. Für den metrischen Fundamentaltensor g_1 sind außerdem die Vektoren $\Phi^{1,-1} = \binom{\varphi}{-\varphi}$ für g_2 die Vektoren $\Phi^{1,1} = \binom{\varphi}{\varphi}$ Nullvektoren; diese bilden jedoch keine invarianten Unterräume. Für die Invarianten der Darstellungen kann man hier folgendes ableiten: Da mit p_k, p_0, M_{kl}, N_k als zu $\{\varphi\}$ zugehörigen Operatoren, die Operatoren p_k^*, p_0^*, M_{kl}^*, N_k^* zu $\{\bar{\varphi}\}$ gehören, so gilt für die Invarianten $\Sigma\, p_\nu^2$, $\Sigma\, \Gamma_\sigma^2$ und falls es noch weitere der im vorigen Abschnitt behandelten gibt, auch für diese: Wenn zu $\{\varphi\}$ der invariante Operator O gehört, dann zu $\{\bar{\varphi}\}$ der invariante Operator O^*. Hieraus folgt:

Satz 9: Die Invarianten besitzen auf $\{\varphi\}$ und $\{\bar{\varphi}\}$ Eigenwerte, die zueinander konjugiert-komplex sind.

Dieses Resultat kann man auch für Untergruppen der inhomogenen Lorentz-Gruppe verwenden: Nimmt man etwa die Untergruppe, welche die dreidimensionalen Drehungen und die Translationen umfaßt (sog. Bewegungsgruppe in drei Dimensionen), so wird z. B. auch $p_0 = H$ eine Invariante. Auf den Darstellungsräumen $\{\varphi\}$ und $\{\bar{\varphi}\}$ hat dann der Energieoperator konjugiert-komplexe Eigenwerte. Dieser Fall liegt z. B. vor, wenn man komplexe Wurzeln für den Eigenwert des V-Teilchens im Lee-Modell zuläßt.

c) Reduzible, nicht zerfallende Darstellungen

Unter die Klasse dieser Darstellungen der inhomogenen Lorentz-Gruppe fallen auch solche, die dem für das Lee-Modell [8] diskutierten Dipolfall analog sind. Um die Diskussion nicht zu sehr auszuweiten, beschränken wir uns hier auf den Grundtyp dieser Klasse: Im Darstellungsraum $\{\varphi\}$ der reduziblen, aber nicht zerfallenden Darstellung $\{W\}$ liege ein invarianter Teilraum $\{\varphi_1\}$, auf dem eine irreduzible Darstellung $\{V_1\}$ induziert wird. Auch die auf das Komplement $\{\varphi_2\}$ (mit $\{\varphi_1\} + \{\varphi_2\} = \{\varphi\}$) wirkenden Matrizen $\{V_2\}$ in

$$\{W\} = \begin{pmatrix} \{V_1\} & \{V\} \\ 0 & \{V_2\} \end{pmatrix}$$

bilden eine Darstellung. Es soll angenommen werden, daß auch $\{V_2\}$ irreduzibel ist.

Satz 10: $\{V_1\}$ und $\{V_2\}$ besitzen für die Invarianten $\Sigma\, p_\nu^2$ bzw. $\Sigma\, \Gamma_\sigma^2$ die gleichen Eigenwerte.

Beweis: Die Operatoren für die Invarianten müssen mit allen Matrizen von $\{W\}$ vertauschen. Die Invarianten sind Polynome von gewissen Elementen des Gruppenringes, ihre darstellenden Matrizen also Polynome der darstellenden Matrizen dieser Elemente des Gruppenringes. Man sieht daraus, daß z. B. zur Invarianten $\Sigma\, p_\nu^2$ eine Matrix A der Gestalt $A = \begin{pmatrix} B_1 & B \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$ gehört. Aus $A\{W\} = \{W\}A$ folgt

$$\begin{pmatrix} B_1\{V_1\}, & B_1\{V\} + B\{V_2\} \\ 0, & B_2\{V_2\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{V_1\}\, B_1, & \{V_1\}\, B + \{V\}\, B_2 \\ 0, & \{V_2\}\, B_2 \end{pmatrix}$$

Wegen der vorausgesetzten Irreduzibilität von $\{V_1\}$ und $\{V_2\}$ folgt $B_1 = \lambda_1 I$, $B_2 = \lambda_2 I$. Mithin

$$\begin{pmatrix} \lambda_1\{V_1\}, & \lambda_1\{V\} + B\{V_2\} \\ 0, & \lambda_2\{V_2\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\{V_1\}, & \{V_1\}\, B + \lambda_2\{V\} \\ 0, & \lambda_2\{V_2\} \end{pmatrix}$$

Es soll bewiesen werden $\lambda_1 = \lambda_2$, indem die Annahme $\lambda_1 \neq \lambda_2$ zum Widerspruch geführt wird. Aus der Untermatrix rechts oben folgt

$$\{V\} = \frac{\{V_1\}\, B - B\{V_2\}}{\lambda_1 - \lambda_2} .$$

$$\text{Mithin wird} \quad \{W\} = \begin{pmatrix} \{V_1\}, & \dfrac{\{V_1\}\, B - B\{V_2\}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ 0, & \{V_2\} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Mit} \quad C = \begin{pmatrix} I, & -\dfrac{B}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} I, & +\dfrac{B}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$\text{ergibt sich} \quad C^{-1}\{W\}\, C = \begin{pmatrix} \{V_1\} & 0 \\ 0 & \{V_2\} \end{pmatrix}.$$

Es läge damit entgegen der Voraussetzung eine Darstellung vor, die man zum Zerfall bringen könnte. Somit muß $\lambda_1 = \lambda_2$ für $\Sigma\, p_\nu^2$ sein; entsprechend $\varrho_1 = \varrho_2$ für $\Sigma\, \Gamma_\sigma^2$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Dieser Sachverhalt legt nahe, nur solche Darstellungen $\{W\}$ zu betrachten, bei denen $\{V_1\}$ äquivalent $\{V_2\}$ ist, wobei man nach entsprechender Wahl der Basis $\{V_1\} = \{V_2\}$ setzen kann.

In der Tat, in den Fällen, bei denen $\Sigma\, p_\nu^2$, $\Sigma\, \Gamma_\sigma^2$ für $\{V_1\}$ und $\{V_2\}$ die einzigen Invarianten sind, folgt bereits $\{V_1\}$ äquivalent $\{V_2\}$, sofern man für beide Darstellungen $m_0 > 0$ und die Darstellungsräume isomorph wählt. Für die übrigen Darstellungen ergibt sich dasselbe, d. h. $\{V_1\}$ äquivalent $\{V_2\}$, wenn man verlangt, daß $\{V_1\}$, $\{V_2\}$ und $\{W\}$ den gleichen Invariantensatz besitzen, d. h. z. B. daß die Operatoren $\Sigma\, p_\nu^2$, $\Sigma\, \Gamma_\sigma^2$, $\Sigma\, M_{\mu\nu}^2$, $\Sigma\, i\, M_{\mu\nu}\, M_{\lambda\sigma}\, \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ sowohl in der irreduziblen Darstellung $\{V_1\}$, wie in der irreduziblen $\{V_2\}$ und in der Darstellung $\{W\}$ mit allen Matrizen ihrer Darstellungen vertauschen. Darum folgt aus dem vorangehenden Beweis die Gleichheit der Eigenwerte der Invarianten für die irreduziblen Darstellungen $\{V_1\}$ und $\{V_2\}$ und unter den gleichen Zusatzforderungen wie oben, die Äquivalenz.

Fortan werden daher nur die Fälle $\{V_1\} = \{V_2\}$, d. h. nur solche $\{W\}$, für die $\{W\} = \begin{pmatrix} \{V_1\} & \{V\} \\ 0 & \{V_1\} \end{pmatrix}$ gilt, betrachtet. Wenn man wie oben mit $\{\varphi_1\}$ den invarianten Teilraum des Darstellungsraumes $\{\varphi\}$ bezeichnet, soll als nächstes bewiesen werden:

Satz 11: Der Fundamentaltensor muß im invarianten Teilraum gleich Null sein, d. h. setzt man an $g = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix}$ für $\{\varphi\}$, so wird bewiesen $g_1 = 0$.

Satz 11 a: Für solche irreduziblen Darstellungen, für die $\{V_1\}$ nicht äquivalent $\{(V_1^*)^{-1}\}$ ist, wird sogar $g = 0$.

Beweis: Es muß

$W^*\, g\, W = g$ oder

$$\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^*\, g_1\, V_1\,, & V_1^*\, g_1\, V + V_1^*\, g_2\, V_1 \\ V^*\, g_1\, V_1 + V_1^*\, g_3\, V_1\,, & V^*\, g_1\, V + V_1^*\, g_3\, V + V^*\, g_2\, V_1 + V_1^*\, g_4\, V_1 \end{pmatrix}$$

für alle darstellenden Matrizen gelten.

Hieraus folgt im Falle 11 a: Wegen $\{V_1\}$ nicht äquivalent zu $\{(V_1^*)^{-1}\}$ muß nach Teil I, § 4 b aus

$g_1 = 0$ und damit aus $g_2 = \{V_1^*\}\, g_2 \{V_1\} + \{V_1^*\}\, g_1 \{V\}$

$g_2 = 0$ folgen und entsprechend

$g_3 = 0$ und hieraus aus der Untermatrix rechts unten

$g_4 = 0$ folgen.

Damit ist 11 a bewiesen.

Es ist natürlich nicht schwer, auch in diesem Fall ein von Null verschiedenes g zu erhalten, wenn man analog zum Teil I, § 4 b, neben der Darstellung $\begin{pmatrix} \{V_1\} & \{V\} \\ 0 & \{V_1\} \end{pmatrix}$ auf $\{\varphi\}$ auch eine Darstellung $\begin{pmatrix} \{(V_1^*)^{-1}\} & \{\tilde{V}\} \\ 0 & \{(V_1^*)^{-1}\} \end{pmatrix}$ mit dem Darstellungsraum $\{\bar{\varphi}\}$ einführt, und g im Raume $\{\varphi\} + \{\bar{\varphi}\}$ entsprechend erklärt wird.

Um Satz 11 zu beweisen, kann man nunmehr $\{V_1\}$ äquivalent $\{(V_1^*)^{-1}\}$ voraussetzen. Der Beweis verläuft dann ganz entsprechend wie der des Satzes 10, in dem die Annahme $g_1 \neq 0$ den Zerfall der Darstellung $\{W\}$ bedingt, entgegen der Voraussetzung; er hängt übrigens nicht davon ab, daß die Darstellungen $\{\varphi_1\}$ und $\{\varphi_2\}$ die gleichen sind.

Hinsichtlich der anderen Untermatrizen von g kann man sofort sehen, daß z. B. die Wahl $g_2 = 0$, $g_3 = 0$, $g_4 = \{V_1^*\}\, g_4 \{V_1\}$ mit Hermiteschem nicht ausgearteten g_4 im Falle der Äquivalenz von $\{V_1\}$ und $\{(V_1^*)^{-1}\}$ einen von Null verschiedenen Fundamentaltensor ergibt. Man kann im allgemeinen aber noch andere Tensoren mit $g_2 \neq 0$ und $g_3 \neq 0$ finden, wie an Hand von speziellen Darstellungen anschließend gezeigt wird.

d) Eine spezielle Klasse von reduziblen, nicht zerfallenden Darstellungen

Es liegt nahe, nach den bisher in der physikalischen Literatur aufgetretenen Beispielen[8, 15], sich einer speziellen Klasse von nicht zerfallenden Darstellungen zuzuwenden. Ausgehend von $\{W\} = \begin{pmatrix} \{V_1\} & \{V\} \\ 0 & \{V_1\} \end{pmatrix}$ soll hier verlangt werden, daß $V = 0$ ist für solche Elemente von $\mathfrak{L}_{i1}$, welche zur Untergruppe der homogenen Lorentz-Transformationen $\mathfrak{L}_{h1}$ gehören. Wenn man von endlichen Darstellungen $\{V_1\}$ ausgeht, so bedeutet diese Wahl gar keine Einschränkung: Für endliche Darstellungen gilt der Satz: Jede Darstellung der homogenen Lorentz-Gruppe $\mathfrak{L}_{h1}$ kann zum Zerfall gebracht werden[13]. Für unendliche irreduzible Darstellungen $\{V_1\}$ wollen wir $V = 0$ für die homogene Untergruppe postulieren. Außerdem soll von den $\{W\}$ noch verlangt werden, daß invariante Bilinearformen innerhalb des Darstellungsraumes von $\{W\}$ existieren, d. h. nach dem vorigen Abschnitt, daß $\{(V_1^*)^{-1}\}$ äquivalent zu $\{V_1\}$ ist. Wir wenden uns nun dem Fundamentaltensor zu, für den sich als spezielle Lösung $g_1 = 0$, $g_2 = 0$, $g_3 = 0$, $g_4 = \{V_1^*\}\, g_4 \{V_1\}$ ergeben hatte, und suchen nach allgemeineren Lösungen von

$$\begin{pmatrix} 0 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & \{V_1^*\}\, g_2 \{V_1\} \\ \{V_1^*\}\, g_3 \{V_1\}\,, & \{V_1\}\, g_3 \{V\} + \{V^*\}\, g_2 \{V_1\} + \{V_1^*\}\, g_4 \{V_1\} \end{pmatrix}$$

Wir fordern g Hermitesch, so daß $g_3 = g_2^*$ ist. g_2 ist bis auf eine komplexe Konstante nach Satz 1 festgelegt. Es gilt, die unendlich vielen Matrix-Glei-

[15] M. Froissart, (Intern. School of Phys., Varenna 1958) Seminarvortrag.

chungen der Untermatrizen rechts unten zu lösen:

$$\text{(a)}\qquad \{V_1^*\}\, g_2^*\{V\} + \{V^*\}\, g_2\{V_1\} + \{V_1^*\}\, g_4\{V_1\} = g_4$$

und gleichzeitig

$$\text{(b)}\qquad \{V_1^*\}\, g_2\{V_1\} = g_2 \qquad \text{zu erfüllen.}$$

Nach den Voraussetzungen gilt für die homogene Untergruppe $\{V\}_{\mathrm{h}} = 0$, so daß

$$\text{(c)}\qquad \{V_1^*\}_{\mathrm{h}}\, g_4\{V_1\}_{\mathrm{h}} = g_4$$

für diese Elemente zu erfüllen ist.

Es sollen nun zwei Fälle unterschieden werden:

1. $\{V_1\}$ gehört zu der Klasse von irreduziblen Darstellungen der inhomogenen LORENTZ-Gruppe, die äquivalent zu einer irreduziblen Darstellung der homogenen LORENTZ-Gruppe sind, d. h. für die $p_\mu = 0$ gilt, so daß die Translationen durch I dargestellt werden. Hier folgt wegen $\{V_1\}_{\mathrm{h}} = \{V_1\}$ für die ersten beiden Glieder

$$\text{(d)}\qquad \{V_1^*\}\, g_2^*\{V\} + \{V^*\}\, g_2\{V\} = 0\,.$$

Es tritt die Frage auf, ob sich diese Gleichung mit einem g_2, das ja bereits (b) erfüllt, für eine gegebene Darstellung lösen läßt.

Die Beantwortung der Frage wird unten zusammen für beide Fälle betrachtet.

2. $\{V\}$ ist eine treue Darstellung der inhomogenen LORENTZ-Gruppe. In diesem Fall ist es schwierig, eine allgemeine Bedingung für die Lösbarkeit zu formulieren. Es läßt sich das folgende einfache Kriterium beweisen:

Kriterium: Falls man g_2 und g_4 so gefunden hat, daß neben (b) und $\{V_1^*\}_{\mathrm{h}}\, g_4\{V_1\}_{\mathrm{h}} = g_4$ auch

$$\text{(e)}\qquad V_1^*(j)\, g_2^*\, V(j) + V^*(j)\, g_2\, V_1(j) + V_1^*(j)\, g_4\, V_1(j) = g_4$$

gilt für ein einziges Element j der inhomogenen Gruppe, das nicht zur homogenen Gruppe gehört, so ist der ganze Satz von Gln. (a) erfüllt.

Man kann damit durch Einsetzen einer beliebigen Matrix der Darstellung, sofern sie nur nicht zu einer homogenen Transformation gehört, entscheiden, ob $g_2 \neq 0$ gewählt werden darf oder nicht. Der Beweis des Kriteriums, der ganz ähnlich verläuft wie der Schritt I des folgenden Satzes, soll hier unterbleiben.

Für die Konstruktion des Zustandsraumes ist die Frage, ob es überhaupt Darstellungen des hier behandelten Typs gibt, welche dieses Kriterium und damit die Gln. (a) und (b) mit nicht verschwindendem g_2 erfüllen von größerer Wichtigkeit. Hierzu werde der folgende Satz aufgestellt:

Satz 12: Zu jeder reduziblen, aber nicht zerfallenden Darstellung des behandelten Typs läßt sich eine reduzible, nicht zerfallende Darstellung des gleichen Typs angeben, zu der ein nicht ausgearteter HERMITEscher Fundamentaltensor gehört.

Die dabei angegebene Darstellung ist derart, daß neben (a) und (b) die etwas schärferen Bedingungen (d) erfüllt sind, so daß die Konstruktion auch für den Fall 1 gilt.

Hier sollen die Resultate des in vier Schritten erfolgenden Beweises angegeben werden, der Beweis mag selbst im Anhang 2 folgen.

Zunächst wird gezeigt (Schritt I) daß mit

$$\{W(d)\} = \begin{pmatrix} \{V_1(d)\}, & \{V(d)\} \\ 0, & \{V_1(d)\} \end{pmatrix}$$

auch

$$\{X(d)\} = \begin{pmatrix} \{V_1(d)\}, & \{g_2^{-1}\, V^*(-d)\, g_2\} \\ 0 & \{V_1(d)\} \end{pmatrix}$$

eine Darstellung ist.

Dann erkennt man (Schritt II), daß

$$\tilde{W}(d) = \begin{pmatrix} \{V_1(d)\}, & \{V(d)\} + g_2^{-1}\{V^*(-d)\}\, g_2 \\ 0, & V_1(d) \end{pmatrix}$$

und

$$\hat{W}(d) = \begin{pmatrix} \{V_1(d)\}, & \{V(d)\} - g_2^{-1}\{V^*(-d)\}\, g_2 \\ 0, & V_1(d) \end{pmatrix}$$

zwei Darstellungen sind, welche die Bedingungen (a), (b) und (d) erfüllen.

Schritt III des Beweises ergibt dann, daß mindestens eine der beiden Darstellungen $\{\tilde{W}\}$ und $\{\hat{W}\}$ nicht zerfallend ist.

Zum Schluß (Schritt IV) wird gezeigt, daß für $\{\tilde{W}\}$ bzw. $\{\hat{W}\}$ die beiden Fundamentaltensoren

$$g = \begin{pmatrix} 0 & g_2 \\ g_2 & \lambda g_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad g = \begin{pmatrix} 0 & -i g_2 \\ i g_2 & \lambda g_2 \end{pmatrix}$$

mit $g_2 = g_2^*$ und λ beliebig reell anzusetzen ist, wobei g_2 die Bedingungen (b) erfüllt.

Eine besonders einfache Gestalt des Fundamentaltensors erhält man, wenn man nicht anfänglich von

$$\{W\} = \begin{pmatrix} \{V_1\} & \{V\} \\ 0 & \{V_1\} \end{pmatrix}$$

sondern von der dazu äquivalenten Darstellung

$$\{W'\} = \begin{pmatrix} \{V_1\} & \{V\} \\ 0 & \{(V_1^*)^{-1}\} \end{pmatrix}$$

ausgeht. Für die zu $\{W'\}$ konstruierten Darstellungen $\{\tilde{W}'\}$ und $\{\hat{W}'\}$ ergeben sich dann die Fundamentaltensoren

$$g = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & \lambda g_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad g = \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ iI & \lambda g_2 \end{pmatrix}.$$

Mit $\lambda = 0$ ergibt sich so für den Fundamentaltensor eine Gestalt, die der des Fundamentaltensors im „Dipolfall" beim LEE-Modell entspricht.

Es sollen zum Schluß eine Zusammenfassung der Ergebnisse und einige weitere Bemerkungen folgen: Bei den reduziblen nicht zerfallenden Darstellungen $\{W\} = \begin{pmatrix} \{V_1\} & \{V\} \\ 0 & \{V_2\} \end{pmatrix}$ besitzen, sofern $\{V_1\}$, $\{V_2\}$ treue Darstellungen der inhomogenen LORENTZ-Gruppe sind, und bei den anderen unter gewissen weiteren Bedingungen, die Invarianten gleiche Eigenwerte für $\{V_1\}$ und $\{V_2\}$, so daß es naheliegt, $\{V_1\} = \{V_2\}$ zu setzen. Teilt man den Fundamentaltensor g in Untermatrizen entsprechend $\{W\}$ ein, $g = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix}$, so folgt auf jeden Fall $g_1 = 0$.

$g_1 = g_2 = g_3 = 0$ und g_4 nicht ausgeartet, kann stets als Fundamentaltensor benutzt werden. Bei einer speziellen Klasse von Darstellungen, bei denen nur die Translationen von Null verschiedene Untermatrizen V besitzen, kann man mehr beweisen. Hier gelingt es, durch eine Änderung der Untermatrizen V zu einem HERMITEschen, nicht ausgearteten Fundamentaltensor zu gelangen, bei dem g_2 und g_3 von Null verschieden sind. g_4 kann beliebig entweder Null oder λg_2 sein, wobei λ ein geeigneter Faktor ist, der g HERMITEsch macht.

Der Nachdruck der Untersuchung wurde gerade auf die letzte Klasse von Darstellungen gelegt, da die bis jetzt in physikalischen Arbeiten erschienenen Beispiele, die Arbeit von HEISENBERG über eine Variante des LEE-Modells [8] und eine Arbeit von FROISSART [15] über eine relativistische Analogie zu dem von HEISENBERG eingeführten Dipolgeist, die entsprechenden $\{V\}$ nur für Translationen von Null verschieden haben.

Man könnte versucht sein anzunehmen, daß auch für $\{V_1\} = 1$ (d. h. physikalisch die Vakuumdarstellung) ein reduzibles $\{W\} = \begin{pmatrix} 1 & v(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ existiert, das nicht zerfallend ist. Man überzeugt sich jedoch schnell, daß so etwas nicht vorkommen kann. Es folgt $v(t) = v(\Lambda t))$ und das führt zu Widersprüchen, was man erkennt, wenn man z. B. $(\Lambda t) = -t$ wählt.

§ 5. *Übergang zu anderen Symmetriegruppen*

Die letzten Abschnitte befaßten sich mit der Konstruktion von invarianten Bilinearformen unter den Transformationen der eigentlichen inhomogenen LORENTZ-Gruppe $\mathfrak{L}_{i1}$. Falls man weitere Symmetriegruppen, d. h. Gruppen, deren Transformationen als Abbildungen des HILBERT-Raumes auf sich selbst gedeutet werden können, betrachtet, so stellt sich diese Aufgabe erneut. Wenn man die vorangehenden Betrachtungen unter dem Gesichtspunkt der Verallgemeinerung auf andere Gruppen noch einmal durchgeht, so zeigt sich, daß man die Ergebnisse weitgehend übernehmen kann. Erhalten bleibt das Schema, das zunächst vollständig zerfallende und reduzible, aber nicht zerfallende Darstellungen unterscheidet, und das die irreduziblen Darstellungen danach klassifiziert, ob $\{(V^*)^{-1}\}$ und $\{V\}$ gleich, ob sie äquivalent oder nicht äquivalent sind. Die Konstruktion der Fundamentaltensoren g, welche in den einzelnen Fällen angegeben wurde, hängt nicht von den speziellen Gruppeneigenschaften ab. Dagegen müssen die Aussagen über die Invarianten und infinitesimalen Operatoren den spezifischen Gruppeneigenschaften angepaßt werden. Die zuletzt diskutierte Klasse von nicht zerfallenden Darstellungen der inhomogenen LORENTZ-Gruppe, bei denen die Translationen den vollständigen Zerfall verhindern, läßt sich für andere Gruppen in der Form übernehmen, daß an die Stelle der Translationen allgemein eine Untergruppe tritt, welche ABELsch und zugleich einfach (d. h. sie enthält keine echte invariante Untergruppe mehr) ist.

Daß die Konstruktion der Fundamentaltensoren am Beispiel der eigentlichen inhomogenen LORENTZ-Gruppe durchgeführt wurde, hat zwei Gründe: Ein physikalischer: Die überragende Bedeutung dieser Gruppe für die Physik der Elementarteilchen. Und ein mathematischer: Es handelt sich um eine Gruppe mit unendlich vielen Elementen, die nicht ABELsch und als topologische Gruppe nicht-kompakt ist.

Für eine Gruppe mit endlich-vielen Elementen gilt: Jede Darstellung ist normal (d. h. einer unitären äquivalent) [13]. Für eine kompakte LIEsche Gruppe gilt: Jede Darstellung ist normal [13].

In beiden Fällen kann man demnach durch Änderung der Basis zu einem Fundamentaltensor innerhalb jeder Darstellung gelangen, der ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist.

Geht man von einer definiten Metrik im Zustandsraum zu einer indefiniten Metrik über, so ergeben sich daher bei den letztgenannten Gruppen keine neuen Gesichtspunkte. Das ist z. B. der Fall, wenn die auftretenden Gruppen einer reellen orthogonalen Gruppe isomorph sind. Wenn die Gruppe zwar nicht mehr kompakt, jedoch noch ABELsch ist, werden die irreduziblen Darstellungen eindimensional. Der Fundamentaltensor muß jeweils ein Element mit dem Eigenwert $\varrho(t)$ mit einem Element, das zum Eigenwert $1/\varrho(t)$ gehört, verbinden.

Anhang

2. Beweis von Satz 12:

Schritt I: Unter den Matrizen $\{V(d)\}$ sind nach Voraussetzung nur die für $V(t)$, t eine Translation, von Null verschieden. Da man alle Matrizen durch die Operationen

(f) $V((\Lambda\, t)) = V_1(\Lambda)\; V(t)\; V_1{}^{-1}(\Lambda)$

und die Additionen

(g) $V(t_1+t_2) = V_1(t_1)\; V(t_2) + V(t_1)\; V_1(t_2)$
$\qquad = V_1(t_2)\; V(t_1) + V(t_2)\; V_1(t_1)$

erhält, muß nur gezeigt werden, daß aus der Gültigkeit dieser Gleichungen für $\{V(t)\}$ die Gültigkeit dieser Gleichungen für $g_2{}^{-1}\, V^*(-t)\; g_2$ folgt.

Führt man in den Gln. (f) links und rechts HERMITEsche Konjugationen durch, ersetzt t durch $-t$, multipliziert mit g von links, mit g_2 von rechts, so ergibt sich

$$g_2{}^{-1}\, V^*((-\Lambda\, t))\, g_2 = g_2{}^{-1}\, (V_1{}^{-1}(\Lambda))^*\; V^*(-t)\; V_1{}^*(\Lambda)\; g_2$$

oder

$$g_2{}^{-1}\, V^*((-\Lambda\, t))\, g_2 = V_1(\Lambda)\, [g_2{}^{-1}\, V^*(-t)\; g_2]\; V_1{}^{-1}(\Lambda)\,.$$

Die gleiche Operation wird an den Gln. (g) durchgeführt. Wegen $V_1{}^{-1}(t) = V_1(-t)$ erhält man

$$g_2{}^{-1}\, V^*(-(t_1+t_2))\, g_2 = V_1(t_1)\, [g_2{}^{-1}\, V^*(-t_2)\; g_2] + [g_2{}^{-1}\, V^*(-t_1)\; g_2]\; V_1(t_2)\,.$$

Damit ist gezeigt, daß mit $\{W(g)\}$ auch

$\chi(d) = \begin{pmatrix} \{V_1(d)\}, & \{g_2{}^{-1}\, V^*(-d)\; g_2\} \\ 0, & \{V_1(d)\} \end{pmatrix}$ eine Darstellung ist.

Schritt II: Auch

$$\tilde{W}(d) = \begin{pmatrix} \{V_1(d)\}, & \{V(d)\} + g_2{}^{-1}\{V^*(-d)\}\; g_2 \\ 0, & \{V_1(d)\} \end{pmatrix}$$

$$\text{und } \hat{W}(d) = \begin{pmatrix} & \{V(d)\} - g_2{}^{-1}\{V^*(-d)\}\; g_2 \\ & \{V_1(d)\} \end{pmatrix}$$

sind Darstellungen. Man hat die Gültigkeit der Gln. (f) und (g) zu beweisen, wenn man dort statt $\{V(d)\}$ die Matrizen

$V(d) + g_2{}^{-1}\, V^*(-d)\; g_2$ bzw. $V(d) - g_2{}^{-1}\, V^*(-d)\; g_2$

einführt. Da die Gleichungen für jeden der beiden Terme in den Klammern gilt, folgt die Gültigkeit von (f) und (g) unmittelbar, da (f) und (g) linear hinsichtlich $\{V\}$ sind.

Schritt III: Zunächst ein Hilfssatz:

Wenn eine Darstellung

$W = \begin{pmatrix} \{V_1\} & \{V\} \\ 0 & \{V_1\} \end{pmatrix}$ $\{V_1\}$ irreduzibel mit einer Matrix

$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix}$

diagonalisiert werden kann, dann läßt sich $\{W\}$ auch mit einer Matrix $K = \begin{pmatrix} I & \alpha \\ 0 & I \end{pmatrix}$ auf die Form

$$K^{-1}\{W\}\, K = \begin{pmatrix} \{V_1\} & 0 \\ 0 & \{V_1\} \end{pmatrix}$$

bringen.

Beweis: Aus

$$A\{W\}\, A^{-1} = \begin{pmatrix} \{D_1\} & 0 \\ 0 & \{D_2\} \end{pmatrix}$$

folgt

(a) $\begin{pmatrix} \alpha_1\{V_1\}, & \alpha_1\{V\} + \alpha_2\{V_1\} \\ \alpha_3\{V_1\}, & \alpha_3\{V\} + \alpha_4\{V_1\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{D_1\}\, \alpha_1, & \{D_1\}\, \alpha_2 \\ \{D_2\}\, \alpha_3, & \{D_2\}\, \alpha_4 \end{pmatrix}.$

Annahme: $\alpha_3 = 0$. Es müssen $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_4 \neq 0$ sein. Aus

$$\begin{pmatrix} \alpha_1\{V_1\}, & \alpha_1\{V\} + \alpha_2\{V_1\} \\ 0, & \alpha_4\{V_1\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{D_1\}\, \alpha_1, & \{D_1\}\, \alpha_2 \\ 0, & \{D_2\}\, \alpha_4 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\{D_1\} = \alpha_1\{V_1\}\, \alpha_1{}^{-1}, \qquad \{D_2\} = \alpha_4\{V_1\}\, \alpha_4{}^{-1}.$$

Damit erhält man

$$\begin{pmatrix} I & \alpha_1{}^{-1}\alpha_2 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{V_1\} & \{V\} \\ 0 & \{V_1\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{V_1\} & 0 \\ 0 & \{V_1\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \alpha_1{}^{-1}\alpha_2 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Mit $K = \begin{pmatrix} I & \alpha_1{}^{-1}\alpha_2 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ läßt sich dann $\{W\}$ diagonal machen.

Annahme: $\alpha_3 \neq 0$. Aus der linken unteren Untermatrix von (a) erhält man $\{D_1\} = \alpha_3\{V_1\}\, \alpha_3{}^{-1}$. Damit ergibt sich aus der rechten unteren Untermatrix von (a)

$$\{V\} = \{V_1\}\, \alpha_3{}^{-1}\, \alpha_4 - \alpha_3{}^{-1}\, \alpha_4\, \{V_1\}\,.$$

Mithin kann $\{W\} = \begin{pmatrix} I & -\alpha_3{}^{-1}\alpha_4 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{V_1\} & 0 \\ 0 & \{V_1\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & +\alpha_3{}^{-1}\alpha_4 \\ 0 & I \end{pmatrix}$

mit $K = \begin{pmatrix} I & -\alpha_3{}^{-1}\alpha_4 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ diagonalisiert werden.

Daß mindestens eine der beiden Darstellungen $\{\tilde{W}\}$ und $\{\hat{W}\}$ nicht zerfallen kann, folgt durch indirekten Beweis:

Annahme: $\{\tilde{W}\}$ und $\{\hat{W}\}$ können beide zum Zerfall gebracht werden. Wie der Hilfssatz zeigt, folgt aus der Tatsache, daß z. B. $\{\tilde{W}\}$ zum Zerfall zu bringen ist, daß man dann dieses auch durch eine Matrix

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} I & \alpha \\ 0 & I \end{pmatrix}$ mit $\tilde{A}^{-1} = \begin{pmatrix} I & -\alpha \\ 0 & I \end{pmatrix}$ erreichen kann.

Dasselbe gilt für $\{\hat{W}\}$, so daß man annehmen kann, daß $\{\hat{W}\}$ mit $A = \begin{pmatrix} I & \beta \\ 0 & I \end{pmatrix}$ diagonalisiert wird. Es ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} I & \alpha \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{V_1\}, & \{V\} + \{U\} \\ 0, & \{V_1\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\alpha \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & \beta \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \{V_1\}, & \{V\} - \{U\} \\ 0, & \{V_1\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\beta \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Es ist $g_2{}^{-1}\{V^*(-d)\}\, g_2 = \{U\}$ gesetzt. Durch Matrixmultiplikation rechts und links ergibt sich für die oberen rechten Untermatrizen

$$-\{V_1\}\, \alpha + \{V\} + \{U\} + \alpha\{V_1\} = -\{\mathrm{V}_1\}\, \beta + \{V\} - \{U\} + \beta\{V_1\}$$

oder

$$\{U\} = \{V_1\}(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta)\{V_1\}.$$

Für $\{U\}$ wird eingesetzt $g_2{}^{-1}\{V^*(-d)\}\, g_2$ und K für $\alpha - \beta$ geschrieben. Dann folgt aus der letzten Gleichung

$$g_2{}^{-1}\{V^*(-d)\}\, g_2 = \{V_1(d)\}\, K - K\{\mathrm{V}_1(d)\}\,.$$

Multipliziert man mit g_2 von links, $g_2{}^{-1}$ von rechts, geht zum HERMITEsch-konjugierten über und berücksichtigt $V_1{}^*(-d) = g_2\, V_1(d)\; g_2{}^{-1}$, so erhält man schließlich

$$\{V(d)\} = g_2{}^{-1}\, K^*\, g_2\{V_1(d)\} - \{V_1(d)\}\, g_2{}^{-1}\, K^*\, g_2$$

oder

$$\{V(d)\} = F\{V_1(d)\} - V_1(d)\; F$$

mit konstantem F.

Es wird dann

$$\{W\} = \begin{pmatrix} I & F \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \{V_1\} \\ \{V_1\} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -F \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

und könnte, wie man sieht, zum Zerfall gebracht werden. Widerspruch. Es muß noch gezeigt werden, daß für die beiden Darstellungen $\{\hat{W}\}$ und $\{\tilde{W}\}$ nicht ausgeartete Fundamentaltensoren existieren.

Schritt IV: Schreibt man für die rechte obere Untermatrix von $\{\tilde{W}\}$ das Zeichen Y, dann erhält man

$$\begin{aligned} g_2^{-1} Y^*(-t)\, g_2 &= g_2^{-1}[V(t) + g_2^{-1} V^*(-t)\, g_2]^*\, g_2 \\ &= g_2^{-1}[V^*(-t) + g_2^*\, V(t)\, (g_2^{-1})^*]\, g_2 , \end{aligned}$$

wählt man jetzt $g_2 = g^{2*}$, so ergibt sich

$$g_2^{-1}\, Y^*(-t)\, g_2 = Y(t) .$$

Da gleichzeitig für g_2 (b) erfüllt sein muß, wird

$$g_2\, Y(t) = V_1^*(t)\, g_2\, V_1(t)\, Y(t)$$

und außerdem gilt

$$Y(-t) = -V_1^{-1}(t)\, Y(t)\, V_1^{-1}(t) .$$

Führt man die letzten beiden Gleichungen in die vorangehende ein, so ergibt sich

$$\{V_1^*(t)\}\, g_2\{Y(t)\} + \{Y^*(t)\}\, g_2\{V_1(t)\} = 0 ,$$

also gilt (d). In diesem Fall kann man den Fundamentaltensor
$g = \begin{pmatrix} 0 & g_2 \\ g_2 & \lambda g_2 \end{pmatrix}$, $g_2 = g_2^*$ mit beliebigem λ wählen.
Genau so beweist man für die Darstellung W, daß der Fundamentaltensor
$g = \begin{pmatrix} 0 & -i g_2 \\ i g_2 & \lambda g_2 \end{pmatrix}$, $g_2 = g_2^*$ mit beliebigem λ verwendet werden kann.

Damit ist Satz 12 bewiesen.

Indefinite Metrik im Zustandsraum und Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Von Siegfried Schlieder

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München

(Z. Naturforschg. **15 a**, 460—467 [1960]; eingegangen am 3. März 1960)

In part I invariant bilinear forms were constructed by means of suitable fundamental tensors. Invariance is one of the conditions for the probability interpretation. In the following part further conditions are specified for the "space of physical states". They are sufficient at the first instance for the probability interpretation for elements of one coherent sector.

Teil II: Der kohärente Sektor

§ 1. Übergang zur kovarianten Schreibweise, Projektionsoperatoren

Für die verschiedenen Typen von irreduziblen Darstellungen wurden in Teil I die metrischen Fundamentaltensoren angegeben. Diese Fundamentaltensoren besitzen die Eigenschaft, daß sie nicht ausgeartet sind und Hermitesch gewählt werden können. Auch für die Klasse von reduziblen, aber nicht zerfallenden Darstellungen, welche bisher in Modelltheorien auftraten, ließ sich ein nichtausgearteter Hermitescher Fundamentaltensor angeben.

Wir wollen daher im folgenden, wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, annehmen, daß im Zustandsraum ein nichtausgearteter, Hermitescher Fundamentaltensor existiert. Man kann dann zu der kürzeren kovarianten Schreibweise übergehen [16, *]. Seien $|\Phi_l\rangle$ die kovarianten Grundvektoren im Zustandsraum, so wird für einen Vektor $|\Psi\rangle$

$$|\Psi\rangle = \Psi^l\, |\Phi_l\rangle ,$$

wobei die Ψ^l die kontravarianten Maßzahlen von $|\Psi\rangle$ in bezug auf die Basis $|\Phi_l\rangle$ sind.

Durch $\langle \Phi_k | \Phi_l \rangle = g_{kl}$

ist die Metrik festgelegt. Nach Teil I kann man annehmen, daß g Hermitesch ist, so daß auch hier

$$\langle \Phi_k | \Phi_l \rangle = \langle \Phi_l | \Phi_k \rangle^* \qquad \text{gilt.}$$

Es ist zweckmäßig, eine zweite Basis mit kontravarianten Grundvektoren $|\Phi^l\rangle$ einzuführen. Sie sind durch

$$\langle \Phi^l | \Phi_m \rangle = \langle \Phi_m | \Phi^l \rangle = \delta_{lm}$$

definiert.

Zum Beispiel erscheint der Vektor $\langle \Psi |$ dann als $\langle \Psi | = \Psi_l^* \langle \Phi^l |$ mit Ψ_l als kovarianten Maßzahlen.

[16] Vgl. W. Heisenberg, Nucl. Phys. **4**, 532—563 [1957], speziell S. 550.

* (Anm. 1—15 siehe Arbeit I, Z. Naturforschg. **15 a**, 448 [1960]; im folgenden mit I zitiert.)